

مبرهنة: لتكن E مجموعة مزودة بقانوني تشكيل داخليين $x \wedge y$ ، $x \vee y$ تحققان ما يلي:

① كل من قانوني التشكيل تحقق خواص الجادوية، التبديلية، والتجميعية.

② قانوني الامتصاص متحققين، أي من أجل أي عنصرين x و y من E يكون:

$$x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$$

عندئذٍ يمكننا أن نعرّف على E علاقة ترتيب وحيدة $\leq$ بحيث تكون مجموعة $(E, \leq)$ شبكة حيث:

$$\sup_E\{x, y\} = x \vee y \quad \& \quad \inf_E\{x, y\} = x \wedge y$$

وعلاقة الترتيب هذه معرفة بواسطة $x \vee y = y$ أو بواسطة $x \wedge y = x$ المتكافئتان.

البرهان: حسب ما رأيناه سابقاً يكفي أن نبرهن أن علاقتي الترتيب $\leq_1$ المعرفة بواسطة $x \vee y = y$.

$x \leq_2 y$ معرفة بواسطة $x \wedge y = x$ يكونان متكافئتان.

نفرض أن $x \leq_1 y$ حيث x, y إختياريان من E $\Leftarrow$ $x \vee y = y$ $\Leftarrow$

$x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ $\Leftarrow$ $x \wedge y = x$ $\Leftarrow$ $x \leq_2 y$

لنفرض الآن أن $x \leq_2 y$ $\Leftarrow$ $x \wedge y = x$ $\Leftarrow$ $x \vee y = (x \wedge y) \vee y$
$= y \vee (y \wedge x) = y$

$\Leftarrow$ $x \vee y = y$ $\Leftarrow$ $x \leq_1 y$

ومنه نستنتج أن علاقتي الترتيب متكافئتان.

مبرهنة:

إذا كانت $(E, \leq)$ شبكة فإن:

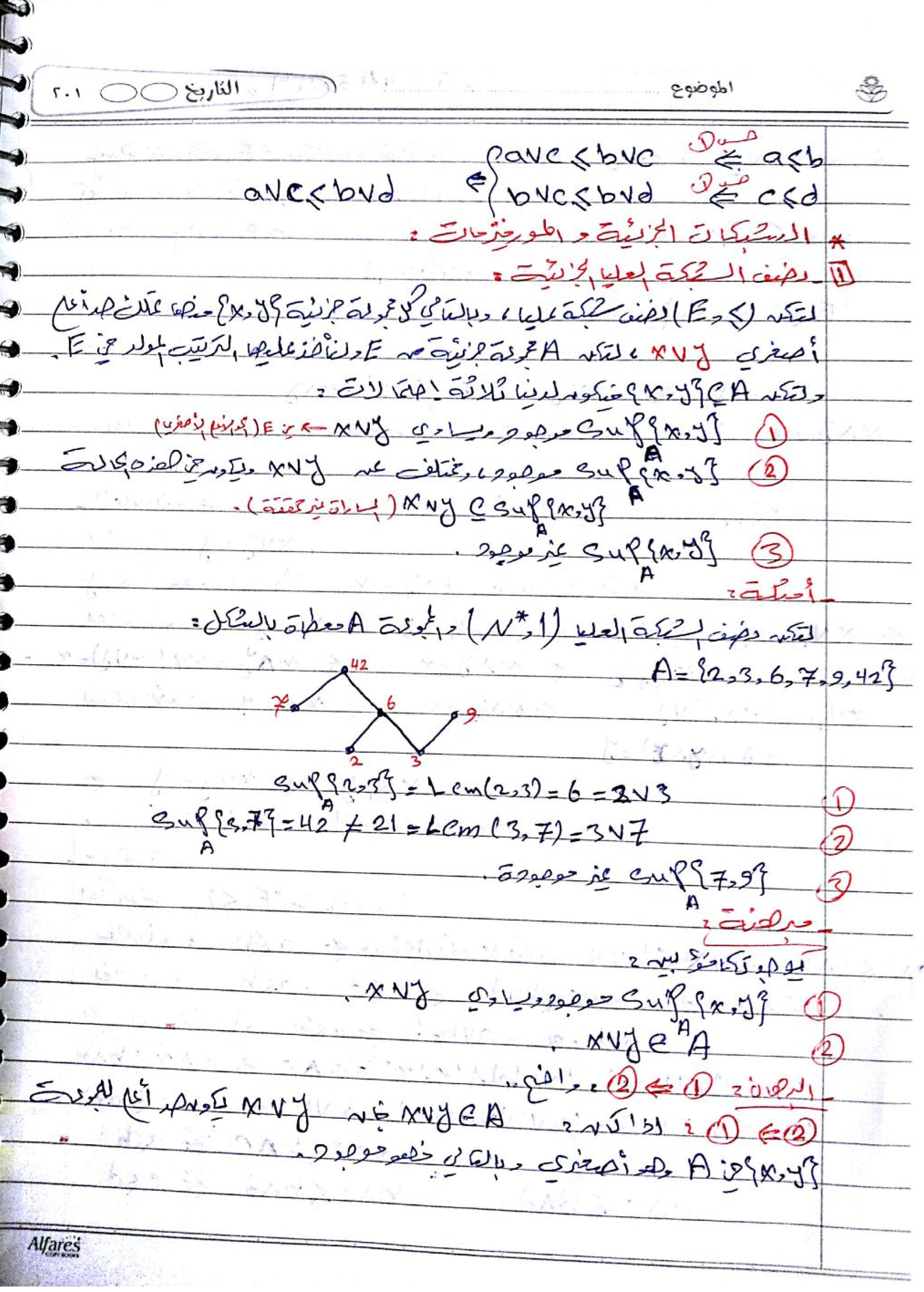
- نفرض أن: $a \leq b$ $\Leftarrow$ من أجل أي x يكون $a \vee x \leq b \vee x$ و $a \wedge x \leq b \wedge x$
- نفرض أن: $a \leq b$ ، $c \leq d$ $\Leftarrow$ $a \vee c \leq b \vee d$ ، $a \wedge c \leq b \wedge d$.

البرهان: نفرض أن $a \leq b$ $\Leftarrow$ $a \vee b = b$ ، $a \wedge b = a$

$(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) \overset{\text{تجميعية}}{=} (a \wedge b) \wedge (x \wedge x) \overset{\text{جادوية}}{=} a \wedge x \Rightarrow a \wedge x \leq b \wedge x$

$(a \vee x) \vee (b \vee x) = (a \vee b) \vee (x \vee x) = b \vee x \Rightarrow a \vee x \leq b \vee x$

$a \leq b \overset{\text{حسب ①}}{\Rightarrow} a \wedge c \leq b \wedge c$
$c \leq d \overset{\text{حسب ①}}{\Rightarrow} b \wedge c \leq b \wedge d$
$\overset{\text{تعدية}}{\Rightarrow} a \wedge c \leq b \wedge d$



$a\leq b \Rightarrow$ (حسب 1) $a\vee c \leq b\vee c$
$c\leq d \Rightarrow$ (حسب 1) $b\vee c\leq b\vee d$
$\Rightarrow a\vee c\leq b\vee d$

* الشبكات الجزئية والمورفزمات :

[1] نصف الشبكة العليا الجزئية :

لتكن $(E,\leq)$ نصف شبكة عليا، وبالتالي كل مجموعة جزئية $\{x,y\}$ منها تملك حداً أعلى أصغري $x\vee y$، لتكن A مجموعة جزئية من E ولنأخذ عليها الترتيب المولد من E.

ولتكن $\{x,y\}\subseteq A$ فيكون لدينا ثلاثة احتمالات :

(1) $\sup_A\{x,y\}$ موجود ومساوي $x\vee y$ ← في E (الحد الأعلى الأصغري)

(2) $\sup_A\{x,y\}$ موجود ويختلف عن $x\vee y$ ويكون في هذه الحالة $x\vee y \subseteq \sup_A\{x,y\}$ (المساواة غير محققة).

(3) $\sup_A\{x,y\}$ غير موجود.

- أمثلة :

لتكن نصف الشبكة العليا $(N^*,1)$ والمجموعة A معطاة بالشكل :

$A=\{2,3,6,7,9,42\}$

(1) $\sup_A\{2,3\}=Lcm(2,3)=6=2\vee 3$

(2) $\sup_A\{3,7\}=42\neq 21=Lcm(3,7)=3\vee 7$

(3) $\sup_A\{7,9\}$ غير موجودة.

- مبرهنة :

يكون تكافؤ بين :

(1) $\sup_A\{x,y\}$ موجود ويساوي $x\vee y$.

(2) $x\vee y\in A$.

- البرهان : (1) ⇐ (2) واضح.

(2) ⇐ (1) : إذا كان $x\vee y\in A$ فإن $x\vee y$ يكون أعلى للمجموعة $\{x,y\}$ في A وهو أصغري وبالتالي فهو موجود.

- تعريف: نسمي المجموعة الجزئية العنصرية A من نصف الشبكة العليا E «نصف شبكة عليا جزئية» إذا تحقق أحد الشرطين المتكافئين:

① $Sup\{x,y\}$ موجود ويساوي $x \vee y$ من أجل أي عنصرين x,y من A.

② $x \vee y \in A$ من أجل أي عنصرين x و y من A.

- ملاحظات:

① من خلال الشرطين يجب الإنتباه إلى أنه طالما يكون العنصران x, y من A، من المثال السابق نلاحظ أن A ليست نصف شبكة عليا جزئية من E على الرغم من أن $2 \vee 3 \in A$.

② من الممكن أن لا تكون A نصف شبكة عليا جزئية ولكنها نصف شبكة عليا من أجل الترتيب المولد.

مثال: في نصف الشبكة العليا $(N^*, |)$ المجموعة $A = \{1, 3, 4, 24\}$ ليست نصف شبكة عليا جزئية من $(N^*, |)$ لأن: $3 \vee 4 = 12 \notin A$

ولكنها نصف شبكة عليا لأن أي عنصرين منها يملكان حداً أعلى أصغري في A.

24, 3, 4, 1

[2] - نصف الشبكة الدنيا الجزئية:

من أجل نصف الشبكة الدنيا $(E, \leq)$ وبشكل مشابه لما سبق إذا كانت $A \subseteq E$ مزودة بعلاقة الترتيب المولدة على A وإذا كانت $\{x, y\} \subseteq A$ فلدينا ثلاثة حالات ممكنة:

① $Inf_A\{x,y\}$ موجودة وتساوي $x \wedge y$.

② $Inf_A\{x,y\}$ موجودة ومختلفة عن $x \wedge y$.

③ $Inf_A\{x,y\}$ غير موجودة.

في الحالة ① تكون: $x \wedge y \in A$

- تعريف: نسمي المجموعة الجزئية العنصرية A من نصف الشبكة الدنيا E «نصف شبكة دنيا جزئية» إذا تحقق أحد الشرطين التاليين المتكافئين:

① $Inf_A\{x,y\}$ موجود ويساوي $x \wedge y$ وذلك من أجل أي عنصرين x, y من A.

② $x \wedge y \in A$ من أجل أي عنصرين x, y من A.

أي أن A تكون نصف شبكة دنيا مع مقصور العملية $(\wedge)$ على A.

- الشبكات الجزئية :

- تعريف : نقول عن المجموعة الجزئية الغير خالية A من الشبكة $(E, \leq)$ بأنها شبكة جزئية إذا كانت في نفس الوقت نصف شبكة عليا جزئية ونصف شبكة دنيا جزئية وهذا يعني أنه من أجل أي عنصرين x, y من A فإن :

$x \vee y \,,\, x \wedge y \in A$ وتكون A شبكة حيث :

$\sup_A\{x,y\} = x \vee y \,,\, \inf_A\{x,y\} = x \wedge y$

- أمثلة على الشبكات الجزئية :

① قواسم عدد : إذا أخذنا الشبكة $(\mathbb{N}^*, |)$ وليكن n عدد طبيعي موجب مختلف عن الصفر ولنرمز بـ $D(n)$ لمجموعة قواسم n فإن $D(n)$ تكون شبكة جزئية من $\mathbb{N}^*$

لأن : $\gcd(x,y) \mid n \qquad Lcm(x,y) \mid n$

$x \mid n \qquad y \mid n$

D(2): 2, 1

D(6): 6, 2, 3, 1

D(12): 12, 4, 6, 2, 3, 1

② المجموعات المفتوحة والمغلقة في فضاء طبولوجي :

ليكن E فضاء طبولوجياً فإن $(P(E), \subseteq)$ تشكل شبكة.

- أسرة المجموعات الجزئية المفتوحة في E تكون شبكة جزئية منها.
- أسرة المجموعات الجزئية المغلقة في E تكون شبكة جزئية منه.

③ المجموعات المنتهية أو المنتهية المتمام :

لتكن E مجموعة ما ولتكن الشبكة $(P(E), \subseteq)$ نقول عن المجموعة الجزئية A من E بأنها منتهية المتمام إذا كانت CA منتهية، إن أسرة المجموعات المنتهية أو المنتهية المتمام في E والتي نرمز لها بـ $Fc(E)$ تكون شبكة جزئية من $P(E)$ وذلك لأنه :

ليكن $A, B \in Fc(E)$ لدينا الحالات التالية :

[1] A منتهية و B منتهية ومنه $A \cup B$ منتهية و $A \cap B$ منتهية

$A \cup B \in Fc(E) \,,\, A \cap B \in Fc(E)$

[2] A منتهية و B منتهية المتمام ومنه $A \cap B$ منتهية $\Leftarrow A \cap B \in Fc(E)$

B منتهية بالتمام ومنه C_B منتهية.

(منتهية بالتمام) $A \cup B$ ⇐ منتهي $C(A\cup B) = C_A \cap C_B$

ومنه $A \cup B \in F_c(E)$.

3 A منتهية بالتمام، و B منتهية بالتمام ومنه C_A منتهية و C_B منتهية

$A \cap B$ منتهية بالتمام ⇐ $C(A\cap B) = C_A \cup C_B$ منتهية

ومنه $A \cap B \in F_c(E)$

$A \cup B$ منتهية بالتمام ⇐ $C(A\cup B) = C_A \cap C_B$ منتهية

ومنه $A \cup B \in F_c(E)$.

من جميع الحالات كل من $A \cup B$ و $A \cap B$ ينتمي إلى $F_c(E)$ ومنه

$F_c(E)$ حلقة جزئية من $P(E)$.

